DOI 10.47402/ed.ep.c2318410258

# CAPÍTULO 10

## UM MODELO DE ENSINO PARA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

**Fernando Cardoso de Matos**
**Marco Antônio de Oliveira Freitas**
**Jose Emilio Medeiros dos Santos**
**Jose Messildo Viana Nunes**

**RESUMO**

Neste artigo a ideia central fora revelar a partir de um modelo epistemológico de referência a luz da Teoria Antropológica do Didático estão subjacentes ao tema transformação linear, por meio de tarefas. A Teoria contribui a construir uma Organização Matemática e Didática, em termos de tipos de tarefas, técnicas e justificações da razão de ser do objeto matemático transformação linear. A razão de ser para se ensinar esse objeto se dá pela aplicação direta da definição, pois os alunos devem se perguntar ao lerem as propostas das tarefas enunciadas pelos autores, para que e porque se estudar tal temática? Algumas tarefas são resolvidas com os conteúdos vistos no ensino médio, como função como tecnologia, não deixando claro ao leitor que é uma transformação de um espaço vetorial em outro. Concluiu-se que os tipos de tarefa apresentados fora possível dar indícios do modelo didático alternativo, para o ensino de transformações lineares, em um curso de licenciatura em matemática.

**PALAVRAS-CHAVE:** Teoria Antropológica do Didático. Organização matemática e didática. Transformações Lineares.

## 1. INTRODUÇÃO

Em relação ao ensino e a aprendizagem constata-se dificuldades encontradas pelos estudantes em relação à Álgebra desde os anos iniciais, principalmente a partir do 7º ano quando se introduz a definição de equação, sem fazer quaisquer tarefas que faça com que o aluno sinta a necessidade e a importância de se algebrizar, pois compreendem a álgebra restrita somente a algoritmos e fórmulas, desprovida de significados. O mesmo acontece com o aluno no ensino superior que estuda AL, que parece ser um saber desconectado dos conhecimentos já presente em seu equipamento praxeológico, que segundo Chevallard (2009), refere-se ao conjunto de práticas, que a partir de agora, Chevallard (2009) praxeologias, que uma pessoa dispõe, referente a um objeto de estudo, ou que está equipada pois tudo parece novo e complexo.

A problemática que se evidencia no ensino da matemática superior pode estar relacionada ao tratamento dado a essa disciplina Álgebra Linear (AL), enfocando os axiomas e fórmulas, mas sem buscar a compreensão da razão de ser de se estudar tais objetos matemáticos, pois se resolvem as tarefas propostas pelo professor sem compreender de fato qual a importância deste estudo.

A ideia se embasa na Teoria Antropológica do Didático (TAD), como teoria motivadora, que permite vislumbrar a possibilidade de trabalhar na perspectiva de um Modelo

Epistemológico de Referência (MER), modelo construído, para se ensinar Transformação Linear (TL), articulado com alguns elementos do ensino básico, já que a disciplina AL, de certa forma é apresentada, sem articulação com outros objetos e outros saberes matemáticos já vistos no ensino básico, o que deve ajudar na compreensão da TL.

Neste artigo evoca-se tarefas nas quais propiciem novas praxeologias referentes ao ensino das TL, presentes nos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, buscando apoio em um MER que possa se tornar um modelo epistemológico alternativo, que possibilite um professor ensinar TL de um modo uma pouco mais compreensível das praxeologias institucionais (presentes em livros e/ou instituições de ensino).

## 2. TEORIA ANTROPOLÓGICO DO DIDÁTICO (TAD)

A TAD é aqui a teoria que visa à discussão da Organização Matemática (OM) presente no livro didático, em termos do gênero de tarefas e tipo de tarefas, técnicas e justificações da razão de ser do objeto matemático Transformação Linear (TL), para dar indícios do modelo epistemológico dominante em uma instituição de ensino superior, que na maioria das vezes se inicia um conteúdo matemático por definição, sem uma nível de complexidade crescente, ou seja, partir de um objeto já conhecido pelos discentes para um não conhecido.

Para Bosch e Gascón (2010) transformar um problema didático em um problema de pesquisa no campo da TAD, é necessário questionar a forma de interpretar o Modelo Epistemológico Dominante (MED), que está presente em boa parte dos livros de Álgebra Linear, onde os conteúdos são ministrados por definição, sem articulação com objetos do ensino médio.

O artigo de Matos *et al* (2017) trata de um modelo presente na obra de (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987), este muito utilizado em Instituições de Ensino Superior (IES), onde as tarefas evocadas pelos autores do livro são meras aplicação das definições apresentadas, pois nas tarefas analisadas constata-se tarefas: verificar se T é uma transformação linear e determinar a transformação T (x, y). Logo, a atividade matemática dos alunos se dar em coerente com os conteúdos contidos nos livros. Destaca-se, também, uma consequência do fenômeno da atomização das OM contidas no livro analisado é a escassez presença da atividade de modelagem matemática em uma dada IES, já que as atividades perpassam pela aplicação direta da definição apresentada, pois nesses manuais caberia tratar as transformações lineares a partir de tarefas com sistemas lineares. A Teoria Antropológica do Didático encaminha que este tipo de OM presente no livro analisado, se torna uma restrição para se implementar um processo onde o aluno Aspectos epistemológicos a luz da teoria antropológica do didático subjacentes ao tema transformação linear possa modelar, já que a forma de interpretar as OM propostas na obra, é uma outra restrição que resulta de algo, além da estrutura das praxeologias matemáticas escolares tais como: a forma de interpretar a atividade matemática por parte das instituições escolares, o que LUCAS *et al*. (2014) denominaram de modelo epistemológico dominante.

A prática de criação dos saberes pelos professores está relacionada diretamente as obras estudadas por esses ao longo de sua vida, portanto é um referencial para a elaboração de conjecturas a respeito do tipo de ensino que está sendo desenvolvido de um determinado saber, em uma determinada instituição. Tal objeto é visto no curso superior de Licenciatura em Matemática de uma determinada Instituição de Ensino Superior (IES) e tem demonstrado ser um obstáculo para os alunos, conforme postulam á que Dorier (2002), Dorier (1997) e Dorier *et al*. (1994) revelam que o formalismo causa dificuldade na aprendizagem desta disciplina.

A TAD criada por Yves Chevallard, cujo objeto de investigação consiste na análise da atividade matemática, entre estas, a escolar, e suas relações humanas enquadradas em determinadas instituições sociais[7].

Segundo Chevallard (1999), toda atividade humana regularmente realizada pode descrever-se com um modelo mínimo (práticas), que se resume aqui com a palavra praxeologia. A TAD o ensino da matemática em qualquer instituição é descrito em termos de *praxeologias* de ensino, ou seja, a ação do sujeito.

Chevallard (1999) inicia a TAD a partir dos seguintes conceitos (Quadro 1):

**Quadro 1**: Conceitos primitivos da TAD.

| |
|---|
| a) *o objeto O*: enfatizando que tudo é objeto e que existe para, no mínimo, uma pessoa ou uma instituição. Um objeto passará a existir quando uma *pessoa X* ou *instituição I* o reconhecer, caracterizando assim, as relações pessoais *R (X,O)* e institucionais *R (I,O)*; |
| b) *as instituições I:* são espaços que promovem aprendizagem ao indivíduo. Todo saber é saber de, no mínimo, uma instituição; |
| c) *as pessoas X:* onde seu primeiro estágio seria de indivíduo, ser singular, que não sofre mudanças. A posteriori, quando há o relacionamento com uma *instituição I*, esse indivíduo passa a ser sujeito, agindo conforme tal instituição, obedecendo suas regras; |
| d) O último estágio seria a noção de *pessoa*, resultado de todas as submissões das instituições a qual se relacionou no decorrer de sua vida, formando suas características psicológicas e sua forma de se relacionar no coletivo. |

**Fonte**: Campelo (2023).

Em uma organização praxeológica, identifica-se: tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Na essência da noção de praxeologia se encontra as noções de tarefas e de tipos de tarefas,

[7] Para Chevallard, Bosch e Gascón (2001) nesse sentido, tanto o conhecimento como as atividades matemáticas são construções sociais que se realizam em instituições, seguindo determinados contratos institucionais.

denotadas, respectivamente, por t e T. Quando uma tarefa t que faz parte de um tipo de tarefa T, diz-se que t ∈ T (t pertence a T).

O bloco do saber-fazer não vive sozinho nas organizações praxeológicas, ele necessita de algo que o legitime, principalmente a técnica **τ**. Isso ocorre pela inserção do bloco do saber ou do logos. Nesse bloco, a técnica **τ** possui um discurso que a justifica, a tecnologia θ. Porém, a tecnologia θ exige uma justificação de alto nível, denominada de teoria, denotada por Θ (CHEVALLARD, 1997, 1998, 1999). Da junção da tecnologia θ com a teoria Θ se tem o bloco do saber, denotado por [θ/Θ]. Em algumas situações específicas, a técnica **τ** é auto tecnológica e, nesse caso, **τ** = θ. No MER aparecerá os elementos do bloco praxeológico anunciados por Chevallard (1997, 1998, 1999) sobre elementos de uma transformação linear.

**3. MER PROPOSTO COM O OBJETO TRANSFORMAÇÕES LINEARES (TL)**

Segundo Carlson (1993), os conceitos são muitas vezes ensinados sem substancial conexão com ideias matemáticas previamente apreendidas pelos alunos, sem exemplos ou aplicações. O autor se pergunta sobre o que pode ser feito para despertar o interesse de alunos entre 14 e 15 anos de idade em relação a noções preliminares de AL, assim como cita já que os há uma forte motivação intrínseca para a matemática linear, como as funções lineares, as equações diferenciais e integrais.

Ainda para Carlson (1993) os alunos não encontram dificuldade em resolver sistemas lineares e matrizes, mas no estudo de subespaços, espaço gerado, independência linear é que ocorrem os problemas de aprendizagem. Algumas razões são:

(a) AL é ensinado muito cedo (segundo período) para alunos imaturos;

(b) tópicos com subespaços e independência linear são conceitos, e não algoritmos;

(c) algoritmos diferentes são necessários em contextos distintos: para se determinar independência linear de vetores e de funções por exemplo;

(d) conceitos são introduzidos sem conexão com experiência anterior do aluno e sem exemplos significativos de aplicações.

Proposta de um MER a partir da OM a seguir:

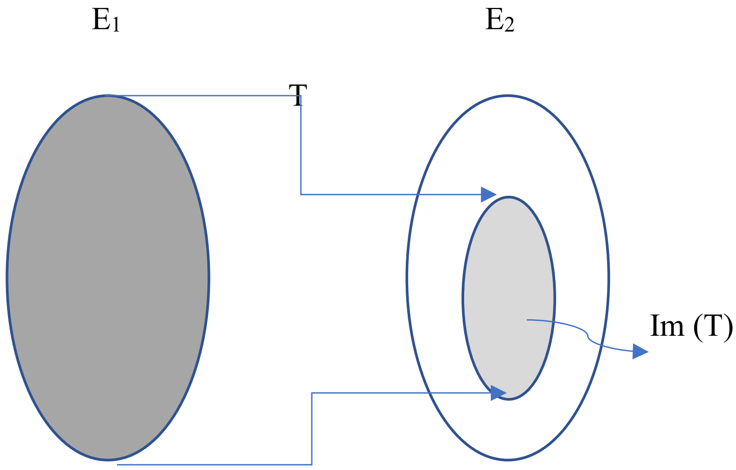
Dados $E_1$ e $E_2$ espaços vetoriais sobre um corpo K e T: $E_1 \rightarrow E_2$ uma aplicação, ou então dados dois vetores $E_1$ e $E_2$, diz-se que T é uma transformação que leva $E_1$ em $E_2$, ou seja, $T(E_1) = E_2$. Se T é linear e se x e y $\in$ $E_1$ e $\alpha \in$ K, então:

i) T(x.y) = T(x) + T(y) transforma o produto em soma.

ii) T(αx) = αT(x) conserva-se o escalar

A Figura 1 apresenta a ideia de uma transformação linear.

**Figura 1**: Representação de uma TL.




**Fonte:** Matos (2017).

$T_{01}$: f: R→R e f(x) uma função linear é uma TL?

$t_{01}$: f: R→R e f(x) = ax uma função linear é uma TL?

Verifique se satisfaz as condições.

$\theta_1$: utilização da definição. A **τ**: é aplicação da definição. A Θ é á Álgebra Linear.

T(x.y) = T(x) + T(y) transforma o produto em soma.

T(αx) = αT(x) conserva-se o escalar

i) f(0) = 0 ainda não me garante que é linear, mas é uma candidata a ser;

ii) f(x+y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y);

iii) f($\alpha$ x) = a($\alpha$ x) = $\alpha$ (ax) = $\alpha$ f(x).

Toda a TL pode ser representada por uma matriz?

Dada uma TL existe uma TL que lhe representa, ou ainda, toda matriz define uma TL.

Seja A matriz a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

Ou dada a transformação: T(x,y,z) =(2y + z, x - 4y, 3x)

É uma TL que leva $R^3 \rightarrow R^3$ e pode ser representado por:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Parte-se da ideia de sistemas lineares, então entende-se que resolver um sistema linear é tomar uma dada transformação, onde se conhece a imagem e quer se determinar o elemento do domínio que tem tal imagem.

A ideia de um *funcional linear* é $T:R^n \rightarrow R$, como, por exemplo:

T(x,y,z)= 4x-y-5z

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Quando T: $R^n \rightarrow R^n$, tem-se um *operador linear* e por fim quando T: $R^n \rightarrow R^m$ este chamado de *transformação linear*. Para os operadores é interessante perguntar:

Não existe uma matriz que seja diagonal? Pois em um produto de matrizes esta deixa o sistema na forma triangular, como por exemplo.

T: $R^2 \rightarrow R^2$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$T_{02}$: Determinar se a transformação A: $R^4 \rightarrow R^4$ é linear.

$T_{02}$: Determine se a transformação A $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z-t \\ x+2y-z+2t \\ x+2y-z+2t \\ 2x-y-z+t \end{pmatrix}$ é linear.

Escreve-se a transformação da seguinte maneira: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

A(v) = Av

i) $A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2$, pois o produto de matrizes é distributivo;

ii) $A(\alpha v) = \alpha A(v)$. Logo toda matriz define uma transformação linear – TL.

Como é uma TL, então quanto é $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 2.0 & -1.0 & 2.0 \\ 2.0 & -1.0 & -1.0 & 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. A imagem do 0 (zero) tem que ser 0, pois todo sistema homogêneo tem solução que é a nula.

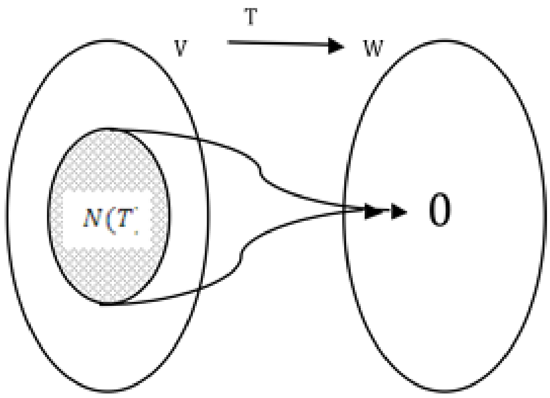
$T_{03}$: Resolver o sistema 4x3, determinando os valores das variáveis que tem imagem nula.

$t_{03}$: Resolver o sistema $\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x + 2y - z + 2t = 0 \\ 2x - y - z + t = 0 \end{cases}$ determinando os valores das variáveis que tem imagem nula.

$\theta_2$: Resolução de sistemas – ensino médio. A $\Theta$ é a álgebra Linear.

Neste problema tem-se Av = 0. Este sistema tem uma importância significativa, pois determina-se os elementos do domínio que tem *imagem nula*, como segue a Figura 02:

**Figura 02**: Motivação geométrica da tarefa.




**Fonte:** IFSUL (2023).

O N(A): Conjunto dos elementos do domínio $E_1$ que tem imagem nula. Como A é linear, então A $(0_{E1}) = 0_{E2}$, logo $0_{E1} \in N(A)$, isto implica que o núcleo da matriz $N(A) \neq \varnothing$ , ou seja, é sempre diferente do vazio, então, o núcleo sempre tem pelo menos um elemento, que é a solução nula. Quando se resolve um sistema linear homogêneo, a ideia é determinar o núcleo da matriz.

Os elementos $e_1$ e $e_2$ do núcleo, então $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, também é do núcleo, pois:

$$A(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = = A(\alpha_1 e_1) + A(\alpha_2 e_2)$$

$$= \alpha_1 A(e_1) + \alpha_2 A(e_2)$$
$$= \alpha_1 0_{E1} + \alpha_2 0_{E2} = 0_{E2}$$

$\Rightarrow \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in N(A)$, logo, N(A) é subespaço do $E_1$.

Dado v e através da transformação $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ terá como imagem $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Então: $V + N(A) = v + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = v' \neq v$. Então a imagem de A(v + N(A)) é:

$$A(v + N(A)) = \quad A(v) \ + \ A\,(N(A))$$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ou seja, para que se obtenha outras soluções do sistema basta que se acrescente as soluções do núcleo.

Retorna-se ao sistema $\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ x+2y-z+2t=0 \\ 2x-y-z+t=0 \end{cases}$. Iguala-se agora o sistema a imagem $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Logo dado a imagem $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ quais os elementos do domínio?

A x = b

$$\begin{cases} x+y+z-t=-1 \\ x+2y-z+2t=1 \\ 2x-y-z+t=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z-t=-1 \\ \quad y-2z+3t=2 \\ \quad -3y-3z+3t=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z-t=-1 \\ \quad y-2z+3t=2 \\ \qquad -9z+12t=10 \end{cases}$$

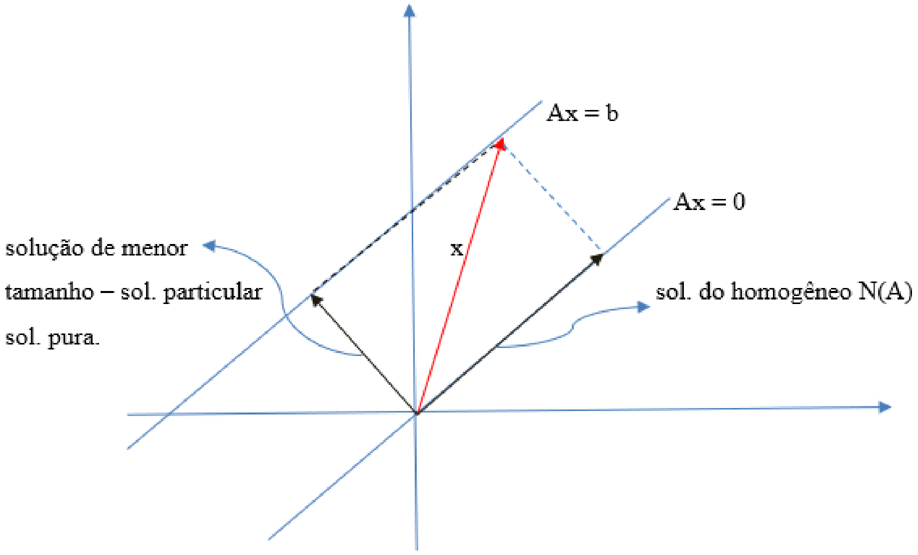
$$\begin{cases} x+y+z=-1+t \\ \quad y-2z=2-3t \\ \qquad -9z=10-12t \end{cases}$$

Sendo **t** a variável livre, então $z=\frac{12t-10}{9}$, $y=-\frac{2}{9}-\frac{3}{9}t$, x = $\frac{3}{9}$ e t=t.

$$v = \begin{pmatrix} \frac{3}{9} \\ -\frac{2}{9}-\frac{3}{9}t \\ -\frac{10}{9}+\frac{12}{9}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ -\frac{10}{9} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{9} \\ \frac{12}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pode-se representar geometricamente, tal situação, mas para o $R^2$, pois não há como fazer o registro do $R^4$, conforme a figura 3.

**Figura 3:** Representação geométrica.




**Fonte**: Matos (2017).

Qualquer solução do sistema x é uma combinação do núcleo (solução do homogêneo) com a solução pura (não depende do núcleo), ou solução de norma mínima ou de menor tamanho (projeção do zero na variedade linear).

$T_{04}$: Dado a matriz A e Ax = 0 um sistema, onde o é a matriz coluna nula, resolva o sistema.

$T_{04}$: Dado $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e o termo independente $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, resolva o sistema.

A técnica se dá pelo estudo qualitativo dos sistemas lineares, enquanto que a tecnologia $\theta_4$: resolução de sistemas, sendo a teoria a Álgebra Linear.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -x_4 \\ x_3 = -2x_4 \\ 0 = 5x_4 \end{cases}$$

x4 = 0, x3 = 0, x2 = x1, então $S = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Então o $N(A) = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ (diz-se gerado por $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Qual a dimensão do sistema?

É uma base de dimensão 1, já que só tem um vetor. Acontece que o espaço é do $R^4$, mas o dim N(A) é 1, logo existe um complemento que é o $R^3$, que significa que tem uma parte que completa o núcleo que também é um subespaço vetorial.

Observar-se no sistema escalonado $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \quad x_3 + 2x_4 = 0 \\ \quad 5x_4 = 0 \end{cases}$ na forma matricial fica

escalonado da seguinte forma $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Como o sistema não tem nenhuma linha que se anula com outra, logo o sistema é linearmente independente, não há como formar uma combinação linear, por exemplo entre o $\alpha$ .1 + $\beta$ .0 = 0, sem que $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, pois para se obter a igualdade o $\alpha = \beta = 0$, ou ainda, a terceira é combinação das outras, $\alpha$ .1 + $\beta$ .0 = 1 (isto não pode dar 1).

Na matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ as linhas 1,2 e 3 forma um espaço do $R^4$, $R(A^t) = [L_1, L_2, L_3]$ e como estas linhas são LI estas formam uma base neste gerado $B = \{ L_1, L_2, L_3 \}$, então a dim $R(A^t)$ é 3. Então a dim $R(A^t)$ + dim N(A) = 4, que é a dimensão do $R^4$. Isto se deve porque qualquer vetor n do núcleo de (A), N(A) = $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$, é da forma $\begin{pmatrix} n \\ n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e fazendo A. n, tem-se:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} n \\ n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.n & -1.n & 1.0 & 1.0 \\ 0.n & 0.n & 0.0 & 2.0 \\ 0.n & 0.n & 0.0 & 5.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Quando calculamos o núcleo da matriz, esta se procurando os elementos em que seu produto escalar com as linhas que é zero $\langle L_1,n \rangle = 0$, $\langle L_2,n \rangle = 0$ e $\langle L_3,n \rangle = 0$. Como o produto escalar é 0, logo são ortogonais entre si, ou seja, o núcleo de uma transformação é ortogonal ao gerado de $R(A^t)$.

O vetor nulo é o único ponto comum, pois está no núcleo da transformação e no gerado de A transposto. Todas as combinações possíveis das linhas da matriz o núcleo continua sendo ortogonal a elas, portanto “quebra-se” o espaço em dois pedaços, ou *decompõem-se o espaço* em dois, que são ortogonais entre si, em que o N(A) é o complemento ortogonal do $R(A^t)$.

Então seja T uma transformação linear T: $E_1 \rightarrow E_2$, A a matriz de T, então a dim $E_1$ = dim N(A) + dim $(R(A^t))$].

**4. CONSIDERAÇÕES FINAIS**

O MER cumpre funções na análise didática que são menos conhecidas e que também abordamos, ao menos parcialmente, neste artigo. Destaca-se explicitamente que a “epistemologia espontânea do professor” que é geralmente um reflexo do modelo epistemológico dominante na instituição escolar, proveniente de suas relações com o livro didático. O Modelo Epistemológico de Referência (MER) pode ser compreendido como uma organização matemática (OD), elaborado para o pesquisador analisar processos transpositivos.

A OD que proposta neste trabalho preconizou um sistema de tarefas composto por tipos de tarefa, tarefas e técnicas, articuladas entre si para que os professores e alunos as utilizem de maneira efetiva em sala de aula para o ensino de transformações lineares.

Assim, no modelo que estruturado, o estudo a partir do objeto de sistemas lineares fora um marco tecnológico-teórico que engloba todas as técnicas necessárias para o enfrentamento do novo conjunto de tarefas, onde as técnicas utilizadas são confiáveis, econômicas e pertinentes ao discurso tecnológico que expos, para atender a intenção didática do professor.

A partir dos estudos fora possível alcançar o objetivo geral almejado e elaborar uma proposta de um Modelo Epistemológico de Referência com o propósito de se tornar alternativo sobre o ensino de transformações lineares.

Revela-se a potencialidade do saber, que é a tecnologia, estudo de sistemas lineares. A tecnologia das praxeologias do modelo justificou o estudo de TL. Sendo assim, está diante de OM, onde as tarefas estão associadas a um componente tecnológico e houve a presença de diferentes técnicas para cada tipo de tarefa com a possibilidade de discernir critérios entre elas. O ensino da Matemática se torna complexo, pois na reconstrução dos saberes, ocorre por conveniência didática, que estes saberes são quebrados, e ficam então desarticulados dos demais objetos. Conclui-se que estudar uma TL é necessário estudar Sistemas Lineares.

## REFERÊNCIAS


BOSH, M. *et al*. **Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación"**. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Eds.), Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action (pp. 49-85), Montpellier, Francia: IUFM de l'Académie de Montpellier. CAMPÊLO, F. O. *et al*. Anthopological theory of didactic and equations of the 2nd degree: the teaching of mathematics of a 9th year in São João-pe. 2010. ReviSeM, Ano 2023, N°. 1, p. 24 – 44.

CARLOSN, D. Teaching linear algebra: Must the fog always roll in?. **The College Mathematics Journal**, 24(1), 29–40, 1993. Disponível em: https://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/papers/g1-dorier-et-al.pdf. Acessado em: Jun. 2015.

CHEVALLARD, Y. **Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission: un point devue didactique**. 1997. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip /article.php3?id_article=30>. Acessado em: Jun. 2014.

CHEVALLARD, Y. **Analyse des Pratiques Enseignantes rt Didactique des Mathematiques: l'Approche Anthropologique**. 1998. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.p hp3?id_article=27>. Acessado em: Dez. 2014.

CHEVALLARD, Y. **El análisis de las prácticas docentes en la teoria antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactiques des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Traducción de Ricardo Campos. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Com la colaboración de Teresa Fernández García, Catedrática de Francés, IES Martinéz Montañes, Sevilla. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/118315/mod_resource/content/1/articulo_chevallard _TAD_1999.pdf. Acessado em: Abr. 2014.

CHEVALLARD, Y, *et al*. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CHEVALLARD, Y. La tad face au professeur de mathématiques. **UMR Adef**, Toulouse. 2009. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_TAD_face_au_ professeur_de_mat hematiques.pdf. Acessado em: Mar. 2017.

DORIER, J. L. *et al*. **The teaching of linear algebra in first year of French science university in the Proceedings of the 18th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education**. Lisbonne, vol. 4, p. 137-144, 1994. Disponível em: https://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/papers/g1-dorier-et-al.pdf. Acessado em: Jan. 2018.

DORIER, J. L. **L'enseignement de l'algébre linéaire en question**. França: La Pensé Sauvage éditions. 1997. p. 291-297.

DORIER, J. L. Teaching Linear Algebra at University. In: LI, T. (Ed.). **Proceedings of the International Congress of Mathematicians**. ICM (Vol. III, pp. 875–884). Beijing, China: Higher Education Press, 2002.

IFSUL. **Instituto Federal do Rio Grande do Sul**. Disponível em: http://tics.ifsul.edu.br/matriz/conteudo/disciplinas/algl/uh/1/5.html. Acessado em: Abril. 2023.

LUCAS, C. *et al*. O Fenômeno Didático Institucional da Rigidez e a Atomização das Organizações Matemáticas Escolares. **Boletim de Educação Matemática**, v. 28, n. 50, 2014. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/qZnbKKYZRMRnJVqh7B4mCFw/?format=pdf&lang=pt. Acessado em: Mai. 2018.

MATOS, F. C. **Praxeologias e modelos praxeológicos institucionais: o caso da álgebra linear.** 324 f. 2017. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.

MATOS, F. C. *et al*. Aspectos epistemológicos a luz da teoria antropológica do didático subjacentes ao tema transformação linear. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém, v. 13, n. 27, p. 124-141, set. 2017. ISSN 2317-5125. Doi: http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v13i27.4285. Disponível em: <https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/4285>. Acessado em: Abr. 2023.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Algebra Linear**. São Paulo: Editora Pearson, 4a ed. 1987.

TELLES, R. A. de M. A Aritmética e a álgebra na matemática escolar. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo: SBEM, ano 11, n. 16, p. 8 -15, 2004. Disponível em: https://tsxvpsbr.dyndns.org/arquivos/UFFS/Algebra%20Linear%20-%20Steinbruch.pdf. Acessado em: Jan. 2016.